Topologia
Lista 1

Zad 1. Niech α i β będą przekrojami Dedekinda. Pokazać, że

a) $\alpha < \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \subsetneq \beta$,

b) $\alpha \leq \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \subseteq \beta$.

Zad 2. Niech α i β będą przekrojami Dedekinda. Pokazać, że wtedy albo $\alpha = \beta$, albo $\alpha < \beta$, albo $\beta < \alpha$.

Zad 3. Pokazać, że relacja $<$ na przekrojach Dedekinda jest tranzytywna.

Zad 4. Niech α i β będą przekrojami Dedekinda. Pokazać, że

$$\alpha + \beta := \{r \in \mathbb{Q} : r = p + q, \text{ gdzie } p \in \alpha, q \in \beta\}$$

jest przekrojem Dedekinda. Obliczyć, $p^* + q^*$ dla liczb wymiernych $p, q \in Q$.

Zad 5. Niech α, β i γ będą przekrojami Dedekinda. Pokazać,

a) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

b) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;

c) $\alpha + 0^* = \alpha$.

Zad 6. Pokazać, że dla każdego przekroju Dedekinda α istnieje dokładnie jeden przekrój β, taki że $\alpha + \beta = 0^*$. Oznaczamy wtedy przekrój β przez $-\alpha$.

Zad 7. Niech α i β będą przekrojami Dedekinda. Pokazać, że istnieje dokładnie jeden przekrój Dedekinda γ, taki że $\alpha + \gamma = \beta$. Oznaczamy wtedy przekrój γ przez $\beta - \alpha$.

Zad 8. Niech α i β będą przekrojami Dedekinda. Pokazać, że jeżeli $\alpha \geq 0^*$ i $\beta \geq 0^*$, to

$$\alpha \cdot \beta := \{r \in \mathbb{Q} : r \leq pq, \quad p \in \alpha,\, q \in \beta,\, p \geq 0,\, q \geq 0\}$$

jest przekrojem Dedekinda. Obliczyć, $\alpha \cdot 0^*$.

Zad 9. Niech α i β będą przekrojami Dedekinda. Pokazać, że jeżeli $\alpha < 0^*$, to $-\alpha \geq 0^*$. Wyciągnąc stąd wniosek, że iloczyn przekrojów zdefiniowany w zadaniu 8 można rozszerzyć na dowolne przekroje wzorem

$$\alpha\beta := \begin{cases} (-\alpha)\beta & \text{gdy } \alpha < 0^* \text{ i } \beta \geq 0^* \\ \alpha(-\beta) & \text{gdy } \alpha < 0^* \text{ i } \beta \geq 0^* \\ (-\alpha)(-\beta) & \text{gdy } \alpha < 0^* \text{ i } \beta < 0^* \\ \alpha\beta & \text{gdy } \alpha \geq 0^* \text{ i } \beta \geq 0^* \end{cases}$$

Zad 10. Niech α, β i γ będą przekrojami Dedekinda. Pokazać, że

a) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$,

b) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$,

c) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma)$,

d) $\alpha \cdot \beta = 0^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha = 0^*$ albo $\beta = 0^*$,

e) $\alpha \cdot 1^* = \alpha$.

Zad 11. Pokazać, że dla każdych przekrojów Dedekinda α i β, gdzie $\alpha \neq 0^*$, istnieje dokładnie jeden przekrój γ, taki że $\alpha \cdot \gamma = \beta$. Piszemy wtedy $\beta/\alpha := \gamma$.